Ćwiczenie nr 1

Zbiory rozmyte – logika rozmyta

Tworzenie: termów zmiennej lingwistycznej o różnych kształtach, modyfikatorów, zmiennych o wielu termach; operacje przecięcia, połączenia i dopełnienia

1. Wprowadzenie

Do czasu wprowadzenia przez L. Zadeha w 1965 roku teorii zbiorów rozmytych i zasad rozumowania rozmytego, nieprecyzyjność bądź niepewność oraz operowanie wielkościami przybliżonymi w działaniach naukowych i inżynierskich były traktowane jako cecha negatywna. Jednakże, w działalności człowieka i komunikacji między ludźmi określenia nieprecyzyjne i przybliżone są na porządku dziennym. Np. dla wyrażenia wzrostu ludzi posługujemy się pojęciami „niski”, „średni”, „wysoki” z płynnymi (rozmytymi) rozgraniczeniami pomiędzy nimi. Również przy podejmowaniu decyzji lub w przypadku sterowania procesami posługującymi się regułami z pojęciami nieprecyzyjnymi tj. rozmytymi. Na przykład przy nauce jazdy samochodem instruktor może wydawać polecenia: „lekko hamować”, „skręcić nieco w prawo”, „silnie przyśpieszyć”, itp., zamiast przy poleceniu skrętu mówić „skręcić w prawo o 17.5^{o}” lub operować regułami: „jeżeli odległość od przeszkody jest dość duża, to lekko hamować”, „jeżeli odległość od świateł skrzyżowania jest mała i światło jest czerwone to silnie hamować”, itp. Zarówno określenia jak i rozumowanie nieprecyzyjne są opisywane za pomocą zbiorów rozmytych oraz przetwarzane przy użyciu logiki rozmytej (rozumowania rozmytego). Teoria zbiorów rozmytych stanowi daleko idące rozszerzenie teorii zbiorów klasycznych.

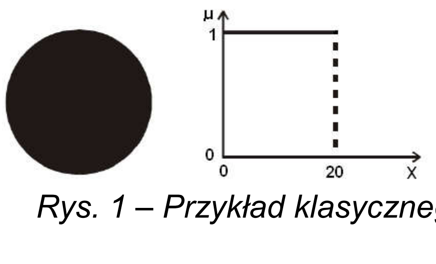
W końcu lat 60-tych i latach 70-tych zainteresowanie teorią zbiorów rozmytych było znikome, szczególnie w USA gdzie uważano, że teorie prawdopodobieństwa są wystarczające do opisu zagadnień związanych z nieprecyzyjnością. Natomiast silny wzrost zainteresowań teorią i aplikacjami zbiorów rozmytych w systemach sterowania i podejmowania decyzji nastąpił w latach 80-tych, szczególnie w Japonii, gdzie zaczęto wdrażać w praktyce sterowanie rozmyte w pociągach, metrze, pralkach automatycznych, aparatach fotograficznych, itp., gdyż okazało się, że realizacja sprzętowa systemów sterowania jest znacznie prostsza i tańsza, niż w przypadku klasycznych systemów sterowania.

2. Różnice między logiką klasyczną a logiką rozmytą

Pojęcie zbioru rozmytego jest uogólnieniem pojęcia zbioru ostrego, polegającym na dopuszczeniu, aby funkcja charakterystyczna (przynależności) zbioru przyjmowała obok stanów krańcowych 0 i 1 również wartości pośrednie.

Z pojęciem zbiorów rozmytych łączy się również pojęcie zmiennej lingwistycznej przez którą rozumiemy zmienną, dla której wartościami są słowa lub zdania w języku naturalnym lub sztucznym np. „wzrost”, „temperatura”, „wiek”. Poza tym każda zmienna lingwistyczna może przyjmować wartości z wcześniej określonego zbioru np. dla zmiennej lingwistycznej „wzrost”, zbiorem wartości może być {„niski”, „średni”, „wysoki”}.

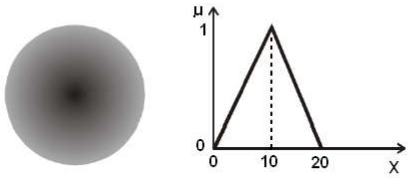
Na rys. 1 przedstawiono przykładowy zbiór klasyczny (nierozmyty) wraz z funkcja przynależności.



$$\mu(x)=\begin{cases}1, & dla\ x\in[0,20]\\ 0, & dla\ x\notin[0,20]\end{cases}$$

Rys. 1 – Przykład klasycznego zbioru (nierozmytego)

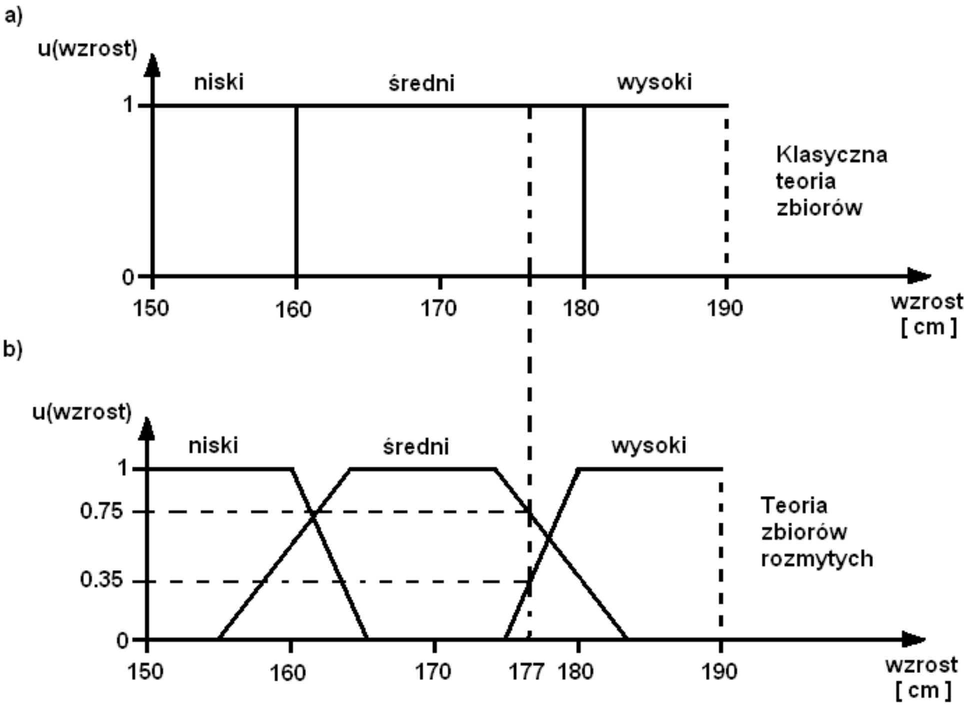
Na rys. 2 przedstawiono przykładowy zbiór rozmyty wraz z funkcją przynależności.



$$\mu(x)=\begin{cases}1-\dfrac{|x-10|}{10}, & dla\ x\in[0,20]\\ 0, & dla\ x\notin[0,20]\end{cases}$$

Rys. 2 – Przykład zbioru rozmytego

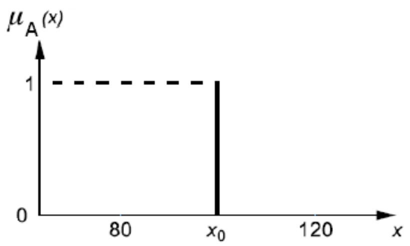
Na rys. 3b przedstawiono zbiór rozmyty dla zmiennej lingwistycznej „wzrost [cm]”. Zbiór ten składa się z trzech termów: „niski”, „średni” i „wysoki”. W związku z tym zmienna lingwistyczna „wzrost [cm]” może przyjmować wartości ze zbioru {„niski”, „średni”, „wysoki”} z określonym stopniem przynależności do każdego z nich. W przypadku gdy zmienna „wzrost [cm]” ma wartość 177 (jak na rys. 3), wówczas widać, że przynależy ona do termu „średni” ze stopniem przynależności 0.75 oraz do termu „wysoki” ze stopniem przynależności 0.35. Co możemy zapisać, że $\mu_{średni}$(wzrost)=0.75, μ_{wysoki}(wzrost)=0.35, Na rys. 3a przedstawiono te same zbiory przy użyciu klasycznej teorii zbiorów.



Rys. 3 – Klasyczna teoria zbiorów (a), teoria zbiorów rozmytych (b)

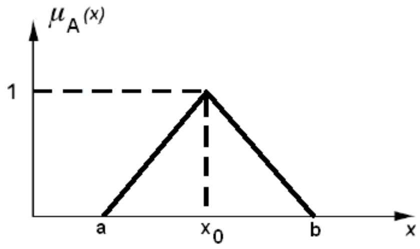
3. Przykłady typowych kształtów zbiorów rozmytych

- singleton



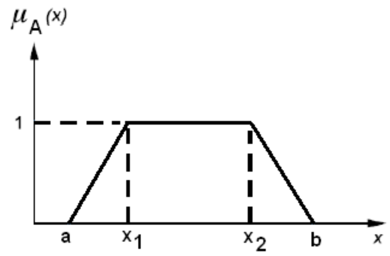
$$\mu_A(x)=\begin{cases}1, & dla\ x=x_0\\ 0, & dla\ x\neq x_0\end{cases}$$

- trójkąt



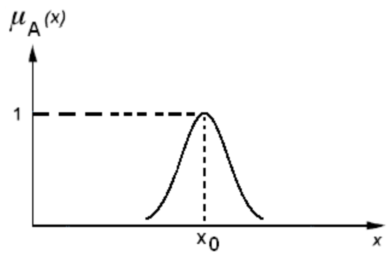
$$\mu_A(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{x_0-a}, & dla\ a\le x\le x_0\\ \dfrac{b-x}{b-x_0}, & dla\ x_0\le x\le b\\ 0, & dla\ innych\ \ x\end{cases}$$

- trapez



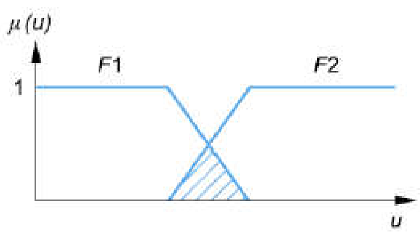
$$\mu_A(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{x_1-a}, & dla\ a\le x\le x_1\\ 1, & dla\ x_1\le x\le x_2\\ \dfrac{b-x}{b-x_2}, & dla\ x_2\le x\le b\\ 0, & dla\ innych\ \ x\end{cases}$$

- funkcje gaussowskie

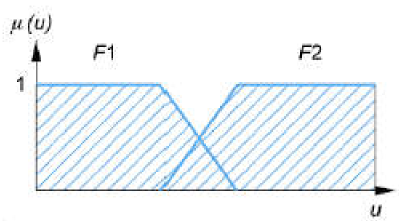


$$\mu_A(x)=\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)^2\right)$$

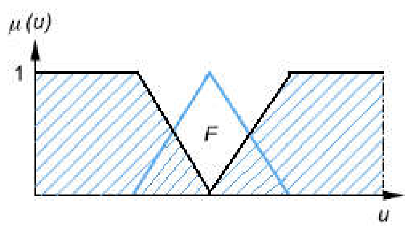
4. Podstawowe operacje na zbiorach rozmytych



operacja przecięcia



operacja sumy



operacja dopełnienia

Operacja przecięcia odpowiada logicznej operacji AND i jest definiowana następująco:

$$\mu_{A\cap B}(x)=MIN\left(\mu_A(x),\,\mu_B(x)\right) \tag{1}$$

Operacja sumy odpowiada logicznej operacji OR i zapisywana jest według zależności:

$$\mu_{A\cup B}(x)=MAX\left(\mu_A(x),\,\mu_B(x)\right) \tag{2}$$

Operacja dopełnienia odpowiada logicznej operacji NOT i zdefiniowana jest następująco:

$$\sim \mu_A(x) = 1 - \mu_A(x) \tag{3}$$

Operatory MAX i MIN nie są jedynymi stosowanymi w operacjach przecięcia i połączenia zbiorów rozmytych. Przecięcie zbiorów rozmytych A i B jest definiowanie ogólnie jako:

$$\mu_{A \cap B}(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x)) = T(A, B) \tag{4}$$

gdzie funkcja dwóch zmiennych *T(A, B)*, nazywana jest normą trójkątną lub T-normą. Przykładami T-normy jest opisany wyżej operator MIN(.) oraz tzw. iloczyn algebraiczny definiowany następująco:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \tag{5}$$

Analogicznie jak przecięcie, połączenie dwóch zbiorów rozmytych A i B jest definiowane ogólnie jako:

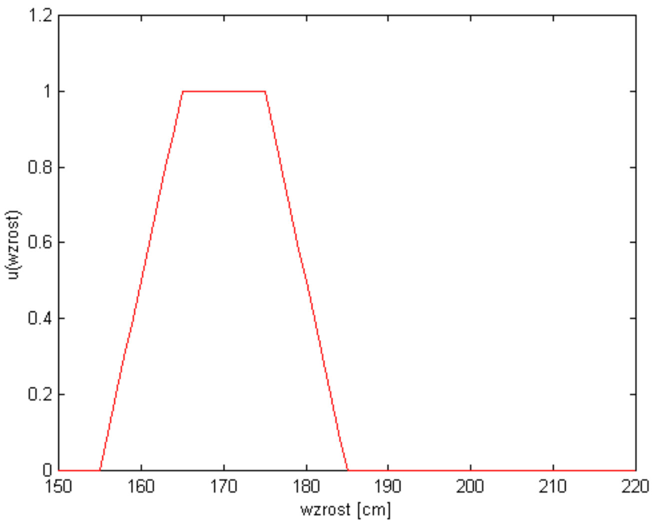
$$\mu_{A \cup B} = S(\mu_A(x), \mu_B(x)) = S(A, B) \tag{6}$$

gdzie funkcja *S(A, B)*, nazywana jest S – normą lub T – konormą. Opisany wyżej operator MAX jest jednym z przykładów S – normy. Innym przykładem może być suma algebraiczna, którą definiuje się następująco:

$$\mu_{A \cup B} = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \tag{7}$$

5. Tworzenie zbioru rozmytego złożonego z pojedynczego termu

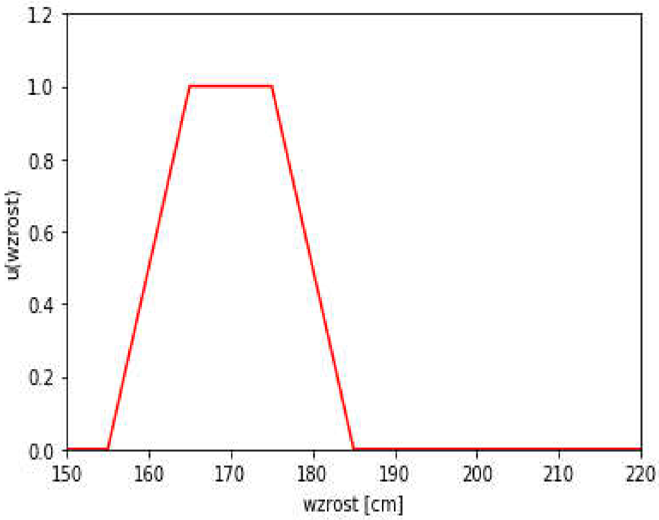
Załóżmy, że zbiór rozmyty składa się z jednego termu „średni”, zmiennej lingwistycznej „wzrost”. Ustalono że obszar rozważań dla tego termu zawiera się w przedziale [155 cm, 185 cm], natomiast obszar rozważań dla zmiennej lingwistycznej „wzrost” zawiera się w przedziale [150 cm, 220 cm]. Przyjęto również że dla wartości od 165 [cm] do 175 [cm] wartość funkcji przynależności zmiennej lingwistycznej „wzrost” do termu „średni” wynosi 1, a dla pozostałych wartości liniowo maleje. Dyskretyzację zmiennej lingwistycznej „wzrost” przyjęto co 1 cm. Wówczas taki term będzie wyglądał jak na rys. 4a (Scilab) lub rys. 4b (Spyder).




```
//---- utworzenie termu "sredni" zmiennej
//---- lingwistycznej "wzrost"
wzrost=zeros(2,71);
for i = 1:71
   x=149+i;
   wzrost(1,i)=x;
   if x>=155 & x<=165
      sredni=(x-155)/(165-155);
   elseif x>165 & x<175
      sredni=1;
   elseif x>=175 & x<=185
      sredni=(185-x)/(185-175);
   else sredni=0;
   end
   wzrost(2,i) = sredni;
end

//---- graficzna prezentacja termu "sredni"
plot(wzrost(1,:),wzrost(2,:),'r');
mtlb_axis([150 220 0 1.2]);
xlabel('wzrost [cm]');
ylabel('u(wzrost)');
```

Rys. 4a – Graficzna prezentacja termu „średni” wraz z tworzącym go kodem (Scilab)




```python
#---- utworzenie termu "sredni" zmiennej
#---- lingwistycznej "wzrost"
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
wzrost=np.zeros((2,71))
for i in range(0,71):
    x=150+i
    wzrost[0,i]=x
    if x>=155 and x<=165:
        sredni=(x-155)/(165-155)
    elif x>165 and x<175:
        sredni=1
    elif x>=175 and x<=185:
        sredni=(185-x)/(185-175)
    else:
        sredni=0
    wzrost[1,i] = sredni

#---- graficzna prezentacja termu "sredni"
plt.plot(wzrost[0,:],wzrost[1,:],'r')
plt.axis([150,220,0,1.2])
plt.xlabel('wzrost [cm]')
plt.ylabel('u(wzrost)')
```

Rys. 4b – Graficzna prezentacja termu „średni” wraz z tworzącym go kodem (Spyder)

6. Zadania do wykonania

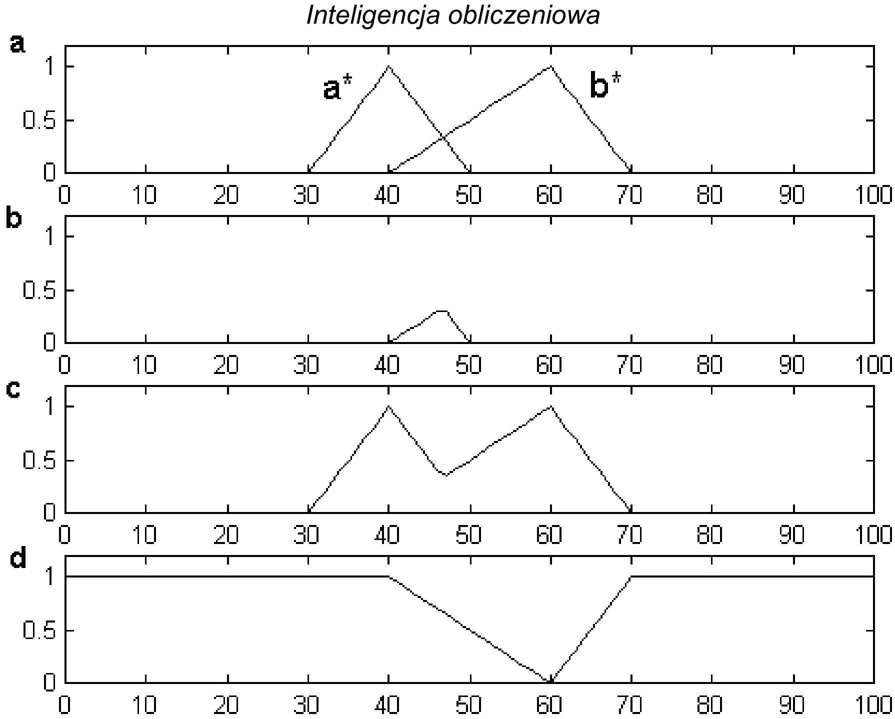
a) utworzyć 4 termy (A, B, C, D) zmiennej lingwistycznej X$\in$[0, 180] (dyskretyzacja zmiennej X co 1) i przedstawić je w formie graficznej na rysunku.

Term A – kształt trójkątny o parametrach (a=0, x_0=0, b=40), term B – kształt trapezowy o parametrach (a=20, x_1=40, x_2=60, b=90), term C – kształt trójkątny o parametrach (a=70, x_0=100, b=130), term D – kształt trapezowy o parametrach (a=110, x_1=140, x_2=180, b=180).

b) utworzyć te same termy co w punkcie 6a, lecz przyjąć dyskretyzację zmiennej X co 0.5

c) utworzyć 2 termy zmiennej lingwistycznej X$\in$[0, 100] (dyskretyzacja co 1) jak na rys. 5a, a następnie wykonać na nich operacje przecięcia (rys. 5b), sumy (rys. 5c) i dopełnienia (na jednym z termów) na (rys. 5d). Otrzymane zbiory przedstawić w formie graficznej.

d) wykonać to samo co w punkcie 6c, lecz dla dyskretyzacji zmiennej lingwistycznej X co 0.25.



Rys. 5 – Przykładowe termy (a) i operacje wykonane na nich: przecięcia (b), sumy (c), dopełnienia na termie b (d)*

e). wykonać to samo co w punkcie 6c, lecz użyć operatorów iloczynu algebraicznego i sumy algebraicznej.